CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică
Clasa a IV-a
21.02.2015

1. a) Aflați diferența dintre cel mai mare număr de patru cifre și cel mai mic număr de trei cifre distincte.

b) Determinați x din egalitatea:

$$2015 \times [2015 - (2015 - 2015 : x)] = 2015$$

2. Într-o clasă sunt 16 elevi. Ştiind că la un test Ştefan a făcut 7 greşeli, iar ceilalţi au făcut fiecare mai puţine greşeli decât el, să se arate că există cel puțin 3 elevi cu acelaşi număr de greşeli.

3. Fie șirul de numere 2, 9, 16, 23,……..

a) Completați șirul cu încă doi termeni
b) Aflați suma primilor 20 de termeni
c) Care este cel de-al 2015-lea termen al șirului?

4. Câte numere pare de patru cifre se pot forma cu ajutorul cifrelor 0, 3, 6, 9 ? Justificați răspunsul.

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.
Timp de lucru: 2 ore

CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj

Matematică - Clasa a IV-a - 21.02.2015

Soluţii

Problema 1

a) Cel mai mare număr de patru cifre este **9999**. Cel mai mic număr de trei cifre distincte este **102.** Diferența este 9897

b) $2015-(2015-2015:x)=1$

$2015-2015:x=2014$

$2015:x=1$

$x=2015$

Problema 2

Fiecare copil, în afară de Ştefan, poate avea 0,1,2,3,4,5,6 greşeli, adică 7 variante de număr de greşeli. Dacă există maxim doi copii, în afară de Ştefan, cu acelaşi număr de greşeli, în clasă vor fi maxim 2 ×7+1=15 elevi. Fals. Deci există cel puțin trei elevi care au același număr de greșeli

Problema3

a) Diferența a doi termeni consecutivi este 7. Următorii termeni sunt: 30 și 37

b) S = 2 + 9 +….+ 135 = (2+135) + (9+128) +….+ (65+72) =137×10 =1370

c) al doilea termen este 2+7; al treilea termen este 2+7×2 …. al 2015-lea termen este 2+7×2014 = 14100

Problema 4

$\overline{abcd}$ numărul format cu cifrele 0,3,6,9 . $\overline{\mathbf{abcd}}$ par atunci *d* poate fi 0 sau 6.
$\overline{\mathbf{abcd}}$ număr de patru cifre atunci *a* poate fi 3,6, sau 9, iar b și c pot fi 0,3,6,9.
Se pot forma 2×3×4×4=96 de numere

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică - Clasa a IV-a Barem de notare

.

Problema 1 **Oficiu 1p**

a) Cel mai mare număr de patru cifre este 9999. **1p**

Cel mai mic număr de trei cifre distincte este 102 **1p**

Diferența este 9897 **1p**

b)

$2015 - (2015 - 2015 : x) = 1$ **2p**

$2015 - 2015 : x = 2014$ **2p**

$2015 : x = 1$ **1p**

$x = 2015$ **1p**

TOTAL **10p**

Problema 2 **Oficiu 1p**

Fiecare copil, în afară de Ştefan, poate avea 0,1,2,3,4,5,6 greşeli, adică 7 variante de număr de greşeli. **3p**

Dacă există maxim doi copii, în afară de Ştefan, cu acelaşi număr de greşeli, în clasă vor fi maxim 2 ×7+1=15 elevi. Fals. **4p**

Concluzia **2p**

TOTAL **10p**

Problema 3 **Oficiu 1p**

c) Diferența a doi termeni consecutivi este 7.
Următorii termeni sunt: 30 și 37 **2p**

b) S = 2 + 9 +….+ 135 = (2+135) + (9+128) +….+ (65+72) =137×10 =1370 **3p**

c) al doilea termen este 2+7; al treilea termen este 2+7×2 …. al 2015-lea termen este 2+7×2014 **2p**

Calcul : al 2015-lea termen este 14100 **2p**

TOTAL **10p**

Problema 4 **Oficiu 1p**

$\overline{abcd}$ numărul format cu cifrele 0,3,6,9

$\overline{abcd}$ par atunci d poate fi 0 sau 6 2p

$\overline{abcd}$ număr de patru cifre atunci a poate fi 3,6, sau 9 3p

b și c pot fi 0,3,6,9 2p

Se pot forma 2×3×4×4=96 de numere **2p**

TOTAL	**10p**

CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică
Clasa a V-a
21.02.2015

1. În trei lăzi sunt 72 de mere. Mutăm din prima ladă în a doua atâtea mere câte erau în a doua ladă și apoi mutăm din a doua în a treia ladă atâtea mere câte erau în a treia. Din lada a treia mutăm în prima ladă atâtea mere câte au mai rămas în ea. Astfel, în cele trei lăzi sunt acum același număr de mere. Câte mere erau inițial în fiecare ladă?

2. Arătați că:

a) numărul $5^n + 3$ se divide cu 4, oricare ar fi numărul natural *n.*
b) Numărul $2^{5^n+3} + 7^{5^n+3}$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural *n*.

3. Determinați suma numerelor naturale *a,b,c* ştiind că au loc simultan egalitățile:

$$a - b = 31 \text{ și } a \cdot b - 2^c = 2015.$$

4. Să se demonstreze că orice număr natural mai mare sau egal cu 10 este mai mare decât produsul cifrelor sale.

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.
Timp de lucru: 2 ore

CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică - Clasa a V-a
- 21.02.2015
Soluții clasa a V-a:

1. Notăm cu *a* numărul de mere din prima ladă, *b* numărul de mere din a doua ladă, *c* numărul de mere din a treia ladă.
La început avem repartiția : I=*a*, II=*b*, III=*c*.
După primul pas avem repartiția: I=*a-b*, II=2*b*, III=*c*.
După al doilea pas avem repartiția: I=*a-b*, II=2*b-c*, III=2*c*.
După al treilea pas obținem: I=*2(a-b)*, II=2*b-c*, III=2*c* - (*a-b*)
Deoarece la sfârșit avem cantități egale, obținem:
$2(a-b)=2b-c=2c-(a-b)=72:3=24$, de unde rezultă că $a-b=12$ și
$2c-12=24$, $c=18$ mere în lada a treia.
Din relația $2b-c=2c-(a-b)\Rightarrow 2b+a-b=2c+c\Rightarrow a+b=3c\Rightarrow a+b=54$. Dar $a-b=12$.
Din ultimele două relații obținem că $a=33$ mere în prima ladă și $b=21$ mere în a doua ladă.

2. a) Cazul $n=0$; $5^0+3=1+3=4$;

Cazul $n\geq 1$; $5^n+3=5^{n-1}\cdot 5^1+3=5^{n-1}(4+1)+3=4\cdot 5^{n-1}+5^{n-1}+3=4\cdot 5^{n-1}+5\cdot 5^{n-2}+$
$+3=4\cdot 5^{n-1}+4\cdot 5^{n-2}+5^{n-2}+3=4\cdot 5^{n-1}+4\cdot 5^{n-2}+\cdots+4\cdot 5^2+4\cdot 5+(5+3)=$

$$=4\cdot(5^{n-1}+5^{n-2}+\cdots+5^2+5+2).$$

b) $\mathrm{U}(2^{5^n+3}+7^{5^n+3})=U(2^{4p}+7^{4p})=7$, ceea ce înseamnă că $2^{5^n+3}+7^{5^n+3}$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural *n*.

3. Din $a-b=31$ rezultă că *a* și *b* au parități diferite, deci $a\cdot b$ este par.
Deoarece $a\cdot b-2^c=2015$ și 2015 este impar, deducem că2^c este impar, deci $c=0$ și $a\cdot b=2016$.
Unul dintre numerele *a* sau *b* este un divizor impar al lui 2016.
Avem $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ și divizorii impari ai lui 2016 sunt 1,3,7,9,21 și 63. Scriind 2016 ca un produs de două numere de parități diferite și analizând toate posibilitățile obținem soluția unică $a=63, b=32$, iar $a+b+c=95$.

4. Fie $k=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0}$, unde $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$;
$k=10^{n-1}\cdot a_{n-1}+\overline{a_{n-2}\ldots a_1a_0}$;
$k>10^{n-1}\cdot a_{n-1}$ (1);
$10^{n-1}=10\cdot 10\cdot\ldots\cdot 10>a_{n-2}\cdot a_{n-3}\cdot\ldots\cdot a_1\cdot a_0$ (2)
Din relațiile (1) și (2) deducem $k>a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot\ldots\cdot a_1\cdot a_0$

CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Barem de corectare

Clasa a **V-a**

Problema 1	**Oficiu 1 p**
La început avem repartiția : I=*a*, II=*b*, III=*c*	1p
După primul pas avem repartiția: I=*a-b*, II=2*b*, III=*c*.	1p
După al doilea pas avem repartiția: I=*a-b*, II=2*b-c*, III=2*c*.	1p
După al treilea pas obținem: I=*2(a-b)*, II=2*b-c*, III=2*c* - (*a-b*)	1p
$2(a-b)=2b-c=2c-(a-b)=72:3=24$	1p
$a-b=12$	1p
$c=18$ mere în lada a treia	1p
$a+b=54$	1p
Finalizare: $a=33$ mere în prima ladă și $b=21$ mere în a doua ladă	1p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
a) Cazul n=0	1p
Cazul $n \geq 1$	4p
$5^n+3=4\cdot(5^{n-1}+5^{n-2}+\cdots+5^2+5+2)$	1p
b) $U(2^{5^n+3}+7^{5^n+3})=U(2^{4p}+7^{4p})$	1p
$U(2^{4p})=6, U(7^{4p})=1$	1p
$U(2^{5^n+3}+7^{5^n+3})=7$ Finalizare	1p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
a și *b* au parități diferite, $a\cdot b$ este par	2p
2^c este impar, deci $c=0$ și $a\cdot b=2016$	2p
$2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ admite divizorii impari 1, 3, 7, 9, 21 și 63	1p
Determinarea $a=63, b=32$	3p
Concluzie: $a+b+c=95$	1p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
Fie k = $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	2p
$k=10^{n-1}\cdot a_{n-1}+\overline{a_{n-2}\ldots a_1a_0}$	2p
$k>10^{n-1}\cdot a_{n-1}$ (1)	2p
$10^{n-1}=10\cdot10\cdot\ldots\cdot10>a_{n-2}\cdot a_{n-3}\cdot\ldots\cdot a_1\cdot a_0$ (2)	2p
Din relațiile (1) și (2) deducem $k>a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot\ldots\cdot a_1\cdot a_0$	1p
TOTAL	**10p**

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică
Clasa a VI-a
21.02.2015

1. Se consideră un număr prim $p > 3$.

a) Demonstraţi că restul împarţirii lui p la 4 este 1 sau 3.

b) Demonstraţi că numărul $(p-1)(p+1)$ este divizibil cu 24.

G.M. 10/2008

2. Se consideră egalităţile $\frac{a}{4} = \frac{b^2+4}{b+1}$ si $\frac{a}{8} = \frac{c}{14}$, unde a, b şi c sunt numere naturale.

a) Arataţi că 4 divide a.

b) Gasiţi toate tripletele (a,b,c) care verifica simultan relaţiile din enunţ.

Cerasela Bociu

3. Se consideră punctele coliniare $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$, în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = 1\ cm$, $A_2A_3 = 2\ cm$, $A_{n-1}A_n = n-1\ cm$, fiind un număr natural, $n > 1$.

a) Calculați lungimea segmentului $[A_1A_{30}]$;

b) Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor $[A_1A_6]$ și $[A_{28}A_{30}]$.

Prof. Schneider Delia, Craiova

4. Se consideră unghiurile proprii $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$, cu interioarele disjuncte, formate în jurul punctului *O*. Unghiul $\widehat{AOB}$ este suplementul unghiului $\widehat{AOC}$, precum și al unghiului $\widehat{BOD}$. Măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$ sunt exprimate, în grade, prin două numere naturale care au cel mai mare divizor comun egal cu 30.

Determinați măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$.

Olimpiada Locală, București 2014

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.

Timp de lucru: 2ore

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică - Clasa a VI-a - 21.02.2015
Soluţii

1.a). Orice număr natural $p>3$ are una din formele $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3, k\in N^*$. Cum $p>3$ este prim rezultă că este impar, deci restirile sale la împarţirea cu 4 sunt 1 sau 3.
b) Ca la subpunctul anterior se demonstrează că p este fie de forma $6k+1$ fie de forma $6k+5$ şi se analizează apoi pentru fiecare caz în parte dar şi cazurile k par şi k impar.

2. a) Din a doua proporţie rezultă $7a=4c$ de unde rezultă că a este par şi dacă înlocuim $a=2k$ analog obţinem k par, deci a este divizibil cu 4.

b) Dacă punem $a=4k$ în prima relatie, aceasta devine $k=b-1+\frac{5}{b+1}$. Din $b+1\mid 5$ obţinem $b\in\{0,4\}$.

Dacă $b=0$ obţinem $a=16$ şi $c=28$ iar dacă $b=4$ obţinem $a=16$ şi $c=7$.

3. a) $A_1A_{30}=A_1A_2+A_2A_3+...+A_{29}A_{30}=1+2+3+...+29=435cm$

b) $A_1A_6=1+2+3+4+5+6=15cm,\ A_{28}A_{30}=28+29=57cm$. Fie *P* și *Q* mijloacele segmentelor $[A_1A_6]$, respectiv $[A_{28}A_{30}]$. Rezultă $PQ=7,5+A_6A_{28}+28,5=36+(6+7+8+...+27)=399cm$

4. Notăm $m(\widehat{AOB})=a,\ m(\widehat{BOC})=b$.

Cum $(a,b)=30\Rightarrow a=30x, b=30y, x,y\in\mathbf{N}^*, (x,y)=1$ avem $m(\widehat{AOC})+a=180^\circ\Rightarrow 2a+b=180^\circ\Rightarrow 60x+30y=180^\circ\Rightarrow 2x+y=6\Rightarrow y$ par nenul $\Rightarrow y\in\{2,4\}$. Dacă $y=2\Rightarrow x=2$ și $(x,y)\neq 1$, nu convine. Dacă $y=4\Rightarrow x=1\Rightarrow a=30^\circ\Rightarrow b=120^\circ\Rightarrow m(\widehat{AOB})=30^\circ,\ m(\widehat{BOC})=120^\circ$. Din $m(\widehat{BOD})+a=180^\circ\Rightarrow m(\widehat{BOD})=150^\circ\Rightarrow m(\widehat{AOD})=120^\circ\Rightarrow m(\widehat{COD})=360^\circ-120^\circ-120^\circ-30^\circ$

CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Barem de corectare

Clasa a **VI-a**

Problema 1 **Oficiu 1 p**

a) Un număr natural se exprimă ca $4k, 4k+1, 4k+2$ sau $4k+3$ 1p

$p>3, p$ prim, implică p impar 1p

Finalizare 1p

b) Un numar prim $p>3$ este de forma $6k+1$ sau $6k+5$ 1p

Tratarea cazului $p=6k+1$ pentru k par şi impar 2p

Finalizare 2p

1p

TOTAL **10p**

Problema 2 **Oficiu 1 p**

a) $7a=4c$ 1p

$a=2k$ 1p

$7k=2c$ 1p

Finalizare 1p

b) Scrierea relaţiei $k=b-1+\frac{5}{b+1}$, unde $a=4k$ 2p

$b+1|5 \Rightarrow b\in\{0,4\}$ 1p

$b=0 \Rightarrow a=16, c=28$ 1p

$b=4 \Rightarrow a=16, c=7$ 1p

TOTAL **10p**

Problema 3 **Oficiu 1 p**

a) $A_1A_{30}=A_1A_2+A_2A_3+...+A_{29}A_{30}=1+2+3+...+29=435cm$ 4p

b) $A_1A_6=1+2+3+4+5+6=15cm,\ A_{28}A_{30}=28+29=57cm$ 2p

Fie *P* și *Q* mijloacele segmentelor $[A_1A_6]$, respectiv $[A_{28}A_{30}]$

$PQ=7,5+A_6A_{28}+28,5=36+(6+7+8+...+27)=399cm$ 3p

TOTAL **10p**

$\Rightarrow 2x+y=6 \Rightarrow y$ par nenul $\Rightarrow y\in\{2,4\}$.

Problema 4 **Oficiu 1 p**

$m(\widehat{AOB})=a,\ m(\widehat{BOC})=b.$ 1p

$(a,b)=30 \Rightarrow a=30x, b=30y, x,y\in\mathbf{N}^*, (x,y)=1$

$m(\widehat{AOC})+a=180^\circ \Rightarrow 2a+b=180^\circ \Rightarrow 60x+30y=180^\circ$ 1p

$\Rightarrow 2x+y=6 \Rightarrow y$ par nenul $\Rightarrow y\in\{2,4\}$ 1p

1p

$y=2 \Rightarrow x=2$ și $(x,y)\neq 1$, nu convine

$y=4 \Rightarrow x=1 \Rightarrow a=30^\circ \Rightarrow b=120^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOB})=30^\circ$,	1p
$m(\widehat{BOC})=120^\circ$.	1p
$m(\widehat{BOD})+a=180^\circ \Rightarrow m(\widehat{BOD})=150^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOD})=120^\circ \Rightarrow$	1p
$m(\widehat{COD})=360^\circ-120^\circ-120^\circ-30^\circ$	1p
	1p
TOTAL	**10p**

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică
Clasa a VII-a
21.02.2015

1. Fie n ≥ 2, număr natural. Determinaţi restul împărţirii numărului $n(n+1)(n+2)$ la n – 1.

Gazeta Matematică 2010

2. Determinați numerele naturale $x, y, z \in \mathbb{N}$, știind că:

$$\frac{4x}{4x+3} = \frac{4y}{y+8} = \frac{5x+z}{4y+3z+2}.$$

***

3. Se consideră paralelogramul ABCD în care vârful A este egal depărtat de dreptele BC, CD si BD. Să se arate că ABCD este romb și să se calculeze $m(\measuredangle BAD)$.

***

4. Fie triunghiul isoscel ΔABC cu $[AB] \equiv [AC]$ şi $m(\angle B) > 30^0$. Fie M un punct situat în interiorul triunghiului ΔABC astfel încât $m(\angle MBC) = 30^0$ şi $m(\angle MAB) = \frac{3}{4} m(\angle BAC)$. Calculaţi măsura unghiului AMC.

***

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.
Timp de lucru: 3 ore

CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică - Clasa a VII-a – Soluții

1. Numărul $n(n+1)(n+2)=((n-1)+1)((n-1)+2)((n-1)+3)=M_{n-1}+6$. Pentru orice n număr natural cu n > 7 restul obţinut este 6. Pentru n $\in\{2,3,4,7\}$ restul este 0. Pentru n = 5 restul este 2, iar pentru n = 6, restul este 1

2. Din $4x < 4x+3, x\epsilon\mathbb{N} \Rightarrow \frac{4x}{4x+3} < 1 \overset{(ip)}{\Longrightarrow} \frac{4y}{y+8} < 1 \Rightarrow 4y < y+8 \Rightarrow 3y < 8 \Rightarrow y < \frac{8}{3}$, $dar\ y\epsilon\mathbb{N} \Rightarrow y\epsilon\{0,1,2\}$.

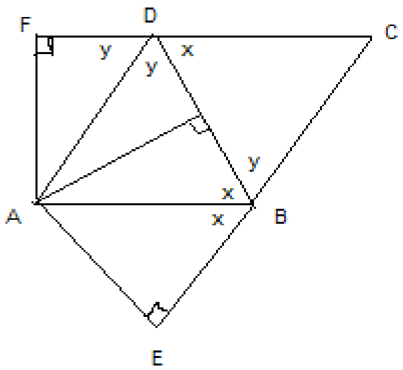
a) Dacă $y = 0 \Rightarrow x = 0$ și $z = 0$.

b) Dacă $y = 1 \Longrightarrow \frac{4x}{4x+3} = \frac{4}{9} \Longrightarrow x = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$.

c) Dacă $y = 2 \Rightarrow \frac{4x}{4x+3} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow z = 5$.

Așadar soluțiile sunt: x=y=z=0 și x=3,y=2,z=5.

3. Deoarece A este egal depărtat de dreptele BC și BD (ip), rezultă că $[BA$ este bisectoarea



Unghiului $\sphericalangle DBE, E\epsilon(CB \Rightarrow m(\sphericalangle DBA) = m(\sphericalangle ABE) = x$. Analog $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle ADF) = y, F\epsilon(CD$. Din ABCD paralelogram $\Rightarrow m(\sphericalangle CDB) = m(\sphericalangle ABD) = x$(alt. int) și $m(\sphericalangle DBC) = m(\sphericalangle ADB) = y$ (alt. int.) $\Rightarrow m(\sphericalangle EBA) + m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle DBC) = 180^\circ \Rightarrow 2x + y = 180^\circ$ (1) și $m(\sphericalangle CDB) + m(\sphericalangle ADB) + m(\sphericalangle ADF) = 180^\circ \Rightarrow 2y + x = 180^\circ$ (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow 2x + y = 2y + x \Rightarrow x = y \Rightarrow [AD] = [AB]$. Dar ABCD este paralelogram $\Rightarrow$ ABCD romb . Din *x* = *y* și *2x* + *y*=$180°$ $\Rightarrow x = y = 60° \Rightarrow m(\sphericalangle BAD) = 60°$.

3. Fie $AD \perp BC$. Fie $\{E\} = BM \cap AD$. Deoarece ΔBEC este isoscel, avem că $m(\angle ECD) = m(\angle EBD) = 30^0$. Cum $m(\angle DEC) = m(\angle MEC) = m(\angle MEA) = 60^0$, avem că (EM este bisectoarea $\angle AEC$. Cum (AM este bisectoarea $\angle EAC$, obţinem că (CM este bisectoarea $\angle ACE$. și $m(\angle AEC) = 120^0$. Dar,

$$m(\angle AMC) = 180^0 - (m(\angle MCA) + m(\angle CAM)) = 180^0 - \frac{180 - m(\angle AEC)}{2} = 150^0$$

Barem de corectare

Clasa a VII-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
Scrierea numărului $n(n+1)(n+2)=M_{n-1}+6$	4p
n > 7 restul obţinut este 6	1p
n $\in \{2,3,4,7\}$ restul este 0	2p
n = 5 restul este 2	1p
n = 6, restul este 1.	1p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
Din $4x < 4x+3, x\epsilon\mathbb{N} \Rightarrow \frac{4x}{4x+3} < 1$	2p
$\overset{(ip)}{\Longrightarrow} \frac{4y}{y+8} < 1 \Rightarrow$	1p
$\overset{(ip)}{\Longrightarrow} \frac{4y}{y+8} < 1 \Rightarrow 4y < y+8 \Rightarrow 3y < 8 \Rightarrow y < \frac{8}{3}, dar\ y\epsilon\mathbb{N} \Rightarrow y\epsilon\{0,1,2\}.$	2p
d) Dacă $y=0 \Rightarrow x=0$ și $z=0$.	1p
e) Dacă $y=1 \Longrightarrow \frac{4x}{4x+3} = \frac{4}{9} \Longrightarrow x = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$.	1p
f) Dacă $y=2 \Rightarrow \frac{4x}{4x+3} = \frac{4}{5} \Rightarrow x=3 \Rightarrow z=5$.	1p
Așadar soluțiile sunt: x=y=z=0 și x=3,y=2,z=5	1 p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
Figura	1p
Deoarece A este egal depărtat de dreptele BC și BD (ip), rezultă că $[BA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DBE, E\epsilon(CB \Rightarrow m(\sphericalangle DBA) = m(\sphericalangle ABE) = x$.	1p
Analog $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle ADF) = y, F\epsilon(CD$.	1p
Din ABCD paralelogram $\Rightarrow m(\sphericalangle CDB) = m(\sphericalangle ABD) = x$(alt. int) $m(\sphericalangle DBC) = m(\sphericalangle ADB) = y$ (alt. int.)	1p

$\Rightarrow m(\sphericalangle EBA) + m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle DBC) = 180^\circ \Rightarrow 2x + y = 180^\circ$ (1)	1p
și $m(\sphericalangle CDB) + m(\sphericalangle ADB) + m(\sphericalangle ADF) = 180^\circ \Rightarrow 2y + x = 180^\circ$ (2)	1p
Din (1) și (2) $\Rightarrow 2x + y = 2y + x \Rightarrow x = y \Rightarrow [AD] = [AB]$.	1p
Dar ABCD este paralelogram $\Rightarrow$ ABCD romb .	1p
Din $x = y$ și $2x + y = 180°$ $\Rightarrow x = y = 60° \Rightarrow m(\sphericalangle BAD) = 60°$.	1p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
$AD \perp BC$.	1p
$\{E\} = BM \cap AD$. $m(\angle ECD) = m(\angle EBD) = 30^0$.	1p
$m(\angle DEC) = m(\angle MEC) = m(\angle MEA) = 60^0$	2p
(EM este bisectoarea $\angle AEC$	1p
(AM este bisectoarea $\angle EAC$	1p
(CM este bisectoarea $\angle ACE$.	1p
$m(\angle AEC) = 120^0$	1p
Finalizare, $m(\angle AMC) = 150^0$	1p
TOTAL	**10p**

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Concurs de selecție Centrul Județean de Excelență Dolj
Matematică
Clasa a VIII-a
21.02.2015

1. Fie $a=\sqrt{10-\sqrt{19}}-\sqrt{10+\sqrt{19}}$. Să se calculeze $\left(a+\sqrt{2}\right)^{2015}$.

***

2. Demonstrați că dacă $a, b, c \in (1, \infty)$ astfel încât $abc = 2\sqrt{2}$ atunci avem inegalitatea:

$$(a+1)(b+1)(c+1) > 8(a-1)(b-1)(c-1)$$

***

3. Fie O centrul bazei unei piramide regulate VABCD. Ştiind că unghiul dintre planele (VAB) şi (VBC) este de 60^0, iar distanța de la O la o muchie laterală este de $2\sqrt{6}$ cm, determinați înălțimea piramidei.

Gazeta matematică

4. Fie $\triangle ABC$ echilateral cu $E \in [AB], F \in [AC]$ astfel încât $AE = 2BE$, $CF = 2FA$, $CE \cap BF = \{T\}$ și $PA \perp (ABC)$. Arătați că:

a. $EF \perp (PAC)$
b. $(PAT) \perp (CEP)$

***

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10.
Timp de lucru: 3 ore

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică
Soluţii clasa a VIII-a:

1. Pentru că $\sqrt{10-\sqrt{19}} < \sqrt{10+\sqrt{19}} \Rightarrow a < 0$.

Din calcul $a^2 = 2$. Cum $a < 0 \Rightarrow a = -\sqrt{2}$.

Deci, $\left(a+\sqrt{2}\right)^{2015} = 0$.

2. Pentru $a > 1$ avem $\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1} \geq 2\sqrt{\frac{2}{a-1}} > \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$. Scriind analoagele și înmulțind avem:

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a-1)(b-1)(c-1)} > \frac{8 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{abc}} = 8$$

3. $VB = \left(ABV\right) \cap \left(CBV\right)$. Dacă $AP \perp VB$, din $\Delta ABV \equiv \Delta CBP$, deducem că $CP \perp VB$ și atunci unghiul dintre planele (VAB) şi (VBC) este unghiul dintre AP și CP.
Presupunând că unghiul dintre AP și CP este $\angle APC$, atunci AC≡AP.
Dar AP < AB și atunci $AP^2 + CP^2 - AC^2 < AB^2 + CB^2 - AC^2 = 0$, ceea ce este imposibil. Rezultă că unghiul dintre dreptele AP și CP este suplementul $\angle APC$. Deci, $m(\angle APC) = 120^0$. Din $AP \perp VB$ și $CP \perp VB$ rezultă că $VB \perp (APC)$, de unde $OP \perp VB$. Adică, $d(O,VB) = OP$. În triunghiul ΔAOP avem $AO = 6\sqrt{2}, AC = 12\sqrt{2}$, rezultă că AB = 12 cm. Din ΔBOP dreptunghic în P avem PB = $4\sqrt{3}$ și cu teorema catetei în ΔVOB obținem $VB = 6\sqrt{3}$.
Deci, VO= 6 cm.

4.

a) $\triangle BEC \equiv \triangle AFB\ (L.U.L.) \Rightarrow \sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle BFA$
Patrulterul $TFAE$ este inscriptibil. Avem că $m(\sphericalangle ETA) = m(\sphericalangle EFA) = 90° \Rightarrow AT \perp EC$ și $EF \perp AC$.
$EF \perp AC$ și $\mathrm{EF} \perp \mathrm{AP} \Rightarrow \mathrm{EF} \perp (\mathrm{PAC})$

b) $EC \perp AT$ și $EC \perp PA \Rightarrow EC \perp (PAT)$.
Din $EC \subset (CEP)$ și din precedenta relație $\Rightarrow (PAT) \perp (CEP)$.

Barem de corectare

Clasa a VIII-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
$\sqrt{10-\sqrt{19}}<\sqrt{10+\sqrt{19}}$	2p
$a<0$	1p
$a^2=2$	3p
$a=-\sqrt{2}$.	2p
Finalizarea	1p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
Dacă a >1 $\frac{a+1}{a-1}=1+\frac{2}{a-1}$	3p
$1+\frac{2}{a-1}\geq 2\sqrt{\frac{2}{a-1}}>\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$	2p
Înmulțirea celor 3 inegalități analoage	3p
Finalizare	1 p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
Fie $AP\perp VB\Rightarrow CP\perp VB$	1p
Unghiul dintre dreptele AP și CP este suplementul $\angle APC$	2p
$m(\angle APC)=120^0$	1p
$VB\perp(APC)$	1p
$d(O,VB)=OP$	1p
AB = 12 cm	1p
$VB=6\sqrt{3}$	1p
VO= 6 cm	1p
TOTAL	**10p**

CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Problema 4	**Oficiu 1 p**
a. $\Delta BEC \equiv \Delta BFA$	1p
Patrulaterul $TFAE$ inscriptibil.	2p
Demonstrarea: $AT \perp EC$ și $EF \perp AC$.	4p
$EF \perp (PAC)$	1p
b. $(PAT) \perp (CEP)$	1p
TOTAL	**10p**

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică
Clasa a IX-a
21.02.2015

1. Determinaţi numerele reale x şi y care verifică ecuaţia :

$$2\sqrt{x+y}+\sqrt{2-4x}+5\sqrt{26-4y}=\frac{55}{2}$$

Gabriel Tica

2. a) Să se demonstreze că dacă $a\geq 1$ atunci pentru orice număr natural $n\geq 2,$ are loc inegalitatea

$$(1+a)^n\geq 1+(n+1)a.$$

b) Să se demonstreze că dacă $a\geq 1$ atunci pentru orice număr real $x>2,$ are loc inegalitatea lui Bernoulli

$$(1+a)^x>1+xa.$$

Sorin Puşpană

3. Să se demonstreze că pentru orice numar real x, cel putin unul dintre numerele $x-\sqrt{x^2-x+1},\quad x+\sqrt{x^2-x+1}$ apartine intervalului $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right].$

Sorin Puşpană

4. Fie ΔABC şi $M\in(AB), N\in(BC), P\in(CA)$ astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{NB}{NC}=\frac{PC}{PA}$. Să se demonstreze că ΔABC şi ΔMNP au acelaşi centru de greutate.

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.
Timp de lucru: 3 ore

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică - Clasa a IX-a – Soluții

1. Din condiţiile de existenţă rezultă $x+y\geq 0, x\leq\frac{1}{2}$ şi $y\leq\frac{13}{2}$. Notăm $a=\sqrt{x+y},\ b=\sqrt{2-4x}$ şi $c=\sqrt{26-4y}$. Atunci se obţine sistemul $2a+b+5c=\frac{55}{2}$ şi $4a^2+b^2+c^2=28$. De aici rezultă $4a^2+b^2+c^2-4a-2b-10c=-27\Leftrightarrow (2a-1)^2+(b-1)^2+(c-5)^2=0$. Rezultă $x=y=\frac{1}{4}$ care nu verifica conditia a= $\frac{1}{2}$

2. a) Prin inducţie matematică după n.
   b) Avem succesiv $(1+a)^x\geq(1+a)^{[x]}\geq 1+(1+[x])a>1+xa.$

3. Notăm $x_1=x-\sqrt{x^2-x+1}$ şi $x_2=x+\sqrt{x^2-x+1}$. Dacă presupunem că x_1 şi x_2 nu aparţin intervalului $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ atunci au loc inegalităţile $\left|x_1-\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{3}}{2},\left|x_2-\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{3}}{2}$, care prin înmulţire conduc la $\frac{3}{4}>\frac{3}{4}$, fals.

4. Dacă notăm cu k valoarea comună a celor trei rapoarte atunci din $\overrightarrow{MB}=k\cdot\overrightarrow{MC}$ obţinem $\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_M}=k\left(\overrightarrow{r_C}-\overrightarrow{r_M}\right)$ de unde $\overrightarrow{r_M}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{r_B}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{r_C}$.
   Analog obţinem $\overrightarrow{r_N}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{r_C}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{r_A},\overrightarrow{r_P}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{r_A}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{r_B}$, care prin sumare conduc la $\overrightarrow{r_M}+\overrightarrow{r_{|N}}+\overrightarrow{r_{AP}}=\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}$, de unde rezultă ca cele două triunghiuri au acelaşi centru de greutate.

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică - Clasa a IX-a – Barem

Problema 1	**Oficiu 1 p**
Notăm $a=\sqrt{x+y}$, $b=\sqrt{2-4x}$ şi $c=\sqrt{26-4y}$.	1p
$2a+b+5c=\frac{55}{2}$ şi $4a^2+b^2+c^2=28$	2p
$4a^2+b^2+c^2-4a-2b-10c=-27$	2p
$(2a-1)^2+(b-1)^2+(c-5)^2=0$	2p
Finalizare	2p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
a) Etapa de verificare: $n=2$	1p
Etapa de demonstraţie	2p
b) Monotonia funcţiei exponenţiale cu baza supraunitare	1p
$x=[x]+\{x\}$	1p
Inegalitatea $(1+a)^x \geq (1+a)^{[x]}$	1p
Inegalitatea $(1+a)^{[x]} \geq 1+(1+[x])a$ ce rezultă din subpunctul anterior	1p
Inegalitatea $1+(1+[x])a > 1+xa$	1p
Finalizare	1p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
Aplicarea metodei reducerii la absurd	1p
Scrierea inegalităţilor $\left\|x_1-\frac{1}{2}\right\|>\frac{\sqrt{3}}{2}, i\in\{1,2\}$	3p
Înmulţirea celor două inegalităţi	2p
Efectuarea corectă a calculelor până la forma $\frac{3}{4}>\frac{3}{4}$	2p
Finalizare	1p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
Notarea cu k a valorii celor trei rapoarte egale	1p
Scrierea vectorială $\overrightarrow{MB}=k\cdot\overrightarrow{MC}$ şi a analoagelor	1p
Scrierea relaţiei $\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_M}=k\cdot\left(\overrightarrow{r_C}-\overrightarrow{r_M}\right)$ şi a analoagelor	1p
Deducerea relaţiei $\overrightarrow{r_M}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{r_B}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{r_C}$, şi a analoagelor	2p

Sumarea ultimelor trei identităţi	2p
Obţinerea relaţiei $\overrightarrow{r_M}+\overrightarrow{r_N}+\overrightarrow{r_P}=\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}$	1p
Finalizare	1p
	1p
TOTAL	**10p**

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică
Clasa a X-a
21.02.2015

1. Să se rezolve in mulțimea numerelor reale ecuația: $3\cdot 2^x + 2\cdot 3^x + 6^x = 6(x-1)^2$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $(f\circ f)(x) = -x^3, \forall x\in\mathbb{R}$

1) Arătați că funcția *f* este inversabilă;
2) Precizați dacă există funcții strict monotone cu proprietatea din enunț. Justificați răspunsul.

3. Demonstrați că $a^{\log_c a}\cdot b^{\log_c b} \geq a^{\log_c b}\cdot b^{\log_c a}$, oricare ar fi $a,b>0, c>1$.

4. Dacă z este un număr complex de modul 1, arătați că

$$\sqrt{3} \leq |1+z| + |1-z+z^2| \leq \frac{13}{4}.$$

Când se realizează egalitățile?

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10.
Timp de lucru: 3 ore

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică
Clasa a X-a
- 21.02.2015
Soluţii clasa a X-a:

1. Împărțim ecuația prin 6 și obținem $2^{x-1}+3^{x-1}+6^{x-1}=(x-1)^2$.

Notăm $y=x-1$ și obținem ecuația $2^y+3^y+6^y=y^2$.

Considerăm funcția $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R},\ f(y)=2^y+3^y+6^y-y^2$, strict crescătoare.

Ecuația $f(y)=0$ are soluție unică $y=-1\Rightarrow x=0$.

Arătăm că ecuația $2^y+3^y+6^y=y^2$ nu are soluții pozitive folosind metoda reducerii la absurd.

Presupunem că există $t\ge 0$ soluție $\Rightarrow 2^t+3^t+6^t=t^2$.

Dar $2^t+3^t+6^t\ge 3\Rightarrow t^2\ge 3\Rightarrow t\ge\sqrt{3}\Rightarrow [t]\ge 1$.

$[t]\le t\Rightarrow 2^t\ge 2^{[t]}=(1+1)^{[t]}\ge 1+[t]>t\Rightarrow 2^t>t$.

$6^t>4^t=2^{2t}=(2^t)^2>t^2\Rightarrow 2^t+3^t+6^t>6^t>t^2\Rightarrow t^2>t^2$ contradicție, deci soluția unică este $x=0$.

2. 1) Demonstrăm că funcția f este bijectivă, deci inversabilă.

Injectivitate:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow (f\circ f)(x_1)=(f\circ f)(x_2)\Rightarrow -x_1^{\ 3}=-x_2^{\ 3}\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ injectivă;

Surjectivitate:

Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x^3$, strict descrescătoare, $\operatorname{Im} g=\mathbb{R}$, deci g bijectivă

$\Rightarrow f$ surjectivă.

Deci f bijectivă, deci inversabilă.

2) Presupunem că f este strict monotonă, rezultă că $(f\circ f)$ este strict crescătoare.

Dar funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x^3$ este strict descrescătoare, deci nu există funcții strict monotone cu proprietatea din enunț.

3. Logaritmăm inegalitatea în baza supraunitară c și folosind proprietățile logaritmilor

$$\Rightarrow \log_c\left(a^{\log_c a}\right)+\log_c\left(b^{\log_c b}\right)\ge \log_c\left(a^{\log_c b}\right)+\log_c\left(b^{\log_c a}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_c a)^2+(\log_c b)^2\ge 2\log_c(a)\log_c(b)\Rightarrow(\log_c a-\log_c b)^2\ge 0\ (A).$$

4. Notăm $t=|1+z|, 0\le t\le 2$.

$t^2=|1+z|^2=(1+z)(1+\bar{z})=2+z+\bar{z}$ deci $z+\bar{z}=t^2-2$. Rezultă:

$\left|1-z+z^2\right|^2=\left(1-z+z^2\right)\left(1-\bar{z}+\bar{z}^2\right)=3-2(z+\bar{z})+z^2+\bar{z}^2=(z+\bar{z}-1)^2=\left(t^2-3\right)^2$.

Inegalitatea de demonstrat devine $\sqrt{3}\le t+\left|t^2-3\right|\le\frac{13}{4}, t\in[0,2]\ (*)$.

Dacă $f(t)=t+\left|t^2-3\right|=\begin{cases}-t^2+t+3, & t\in\left[0,\sqrt{3}\right]\\ t^2-t-3, & t\in\left(\sqrt{3},2\right]\end{cases}$ atunci variația funcției f este următoarea:

t	0		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		2
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

Deci $\sqrt{3} \leq f(t) \leq \frac{13}{4}$.

Egalitatea din stânga se realizează când $t=\sqrt{3} \Leftrightarrow z=\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Egalitatea din dreapta se realizează când $t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow z=-\frac{7}{8} \pm i\frac{\sqrt{15}}{8}$.

CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Barem de corectare

Clasa a X-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
Împărțim ecuația prin 6 și obținem $2^{x-1}+3^{x-1}+6^{x-1}=(x-1)^2$.	1p
Notăm $y=x-1$ și obținem ecuația $2^y+3^y+6^y=y^2$.	1p
Considerăm funcția $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+3^x+6^x-x^2$, strict crescătoare.	1p
Ecuația $f(y)=0$ are soluție unică $y=-1\Rightarrow x=0$.	1p
Arătăm că ecuația $2^y+3^y+6^y=y^2$ nu are soluții pozitive folosind metoda reducerii la absurd.	1p
Presupunem că există $t\geq 0$ soluție $\Rightarrow 2^t+3^t+6^t=t^2$.	1p
Dar $2^t+3^t+6^t\geq 3\Rightarrow t^2\geq 3\Rightarrow t\geq\sqrt{3}\Rightarrow [t]\geq 1$.	1p
$[t]\leq t\Rightarrow 2^t\geq 2^{[t]}=(1+1)^{[t]}\geq 1+[t]>t\Rightarrow 2^t>t$.	1p
Finalizare	1p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
f este inversabilă $\Leftrightarrow$ *f* este bijectivă	1p
Injectivitate:	2p
Surjectivitate:	2p
f bijectivă, deci inversabilă.	
Presupunem că *f* este strict monotonă, rezultă că $(f\circ f)$ este strict crescătoare	2p
Dar funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-x^3$ este strict descrescătoare, deci nu există funcții strict monotone cu proprietatea din enunț	2p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
Logaritmăm în baza c: $\log_c\left(a^{\log_c a}\right)+\log_c\left(b^{\log_c b}\right)\geq\log_c\left(a^{\log_c b}\right)+\log_c\left(b^{\log_c a}\right)$	3p
$\Rightarrow(\log_c a)^2+(\log_c b)^2\geq 2\log_c(a)\log_c(b)$	3p
Finalizare	3p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
$t=\|1+z\|,0\leq t\leq 2\Rightarrow t^2=\|1+z\|^2=(1+z)(1+\bar{z})=2+z+\bar{z}\Rightarrow z+\bar{z}=t^2-2$	2p
$\left\|1-z+z^2\right\|^2=\left(1-z+z^2\right)\left(1-\bar{z}+\bar{z}^2\right)=3-2(z+\bar{z})+z^2+\bar{z}^2=(z+\bar{z}-1)^2=\left(t^2-3\right)^2$	2p
Inegalitatea de demonstrat devine $\sqrt{3}\leq t+\left\|t^2-3\right\|\leq\frac{13}{4}, t\in[0,2]$	1p

$$f(t)=t+\left|t^2-3\right|=\begin{cases}-t^2+t+3, & t\in\left[0,\sqrt{3}\right]\\ t^2-t-3, & t\in\left(\sqrt{3},2\right]\end{cases}$$ 1p

t	0		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		2
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

1p

Egalitatea din stânga se realizează când $t=\sqrt{3}\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1p

Egalitatea din dreapta se realizează când $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow z=-\frac{7}{8}\pm i\frac{\sqrt{15}}{8}$ 1p

TOTAL **10p**

CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică
Clasa a XI-a
21.02.2015

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2015\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că dacă $X \in M_2(\mathbb{R})$ cu $AX = XA$, există $a,b \in R$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$.

b) Determinați matricele $Y \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y^{2015}=A$.

2. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrici inversabile astfel încât $A^{-1}+B^{-1}=I_n$. Să se arate că:

a) $I_n=(I_n-A)(I_n-B)$.

b) $\det\left[I_n-A^3-B^3+(AB)^3\right]\geq 0$.

3. Fie șirul de numere reale strict pozitive $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_0=x_1=1$ și

$$n(n+1)\left(x_{n+1}\sqrt{x_{n-1}}-x_n\sqrt{x_n}\right)=\sqrt{x_{n-1}\cdot x_n}\ ,\ \forall\, n\geq 1.$$

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Fie un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea:

$x_n>0$ și $x_{n+1}-\frac{1}{x_{n+1}}=x_n+\frac{1}{x_n}$, $(\forall)\ n\geq 1$. Să se calculeze :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\frac{1}{x_n}\right).$$

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10.
Timp de lucru: 3 ore

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

Concurs de selecție Centrul Județean De Excelență Dolj
Matematică
Clasa a XI-a
- 21.02.2015
Soluţii clasa a XI-a:

1.a) Luăm $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Din condiția $AX=XA$ găsim că $x=t$ și $z=0$. Notăm $x=a, y=b$

și rezultă $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

b) Din $AY=Y^{2016}=YA$, conform punctului a) deducem că $Y=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a,b\in R$ și

$Y^{2015}=\begin{pmatrix} a^{2015} & 2015a^{2014}b \\ 0 & a^{2015} \end{pmatrix}$.

Rezultă $a=b=1$ deci $Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) Din $A^{-1}+B^{-1}=I_n \Rightarrow I_n+AB^{-1}=A \Rightarrow A+B=AB$ și prin urmare $(I_n-A)\cdot(I_n-B)=I_n$.

b) Matricea (I_n-A) fiind inversabilă, cu inversa (I_n-B), rezultă că $(I_n-A)\cdot(I_n-B)=I_n$
$\Leftrightarrow BA=A+B$. Deci $AB=BA$ și avem:

$I_n-A^3-B^3+(AB)^3=I_n-A^3-B^3+A^3B^3=(I_n-A^3)\cdot(I_n-B^3)=$

$=(I_n-A)\cdot(I_n-B)\cdot(I_n+A+A^2)\cdot(I_n+B+B^2)=(I_n+A+A^2)\cdot(I_n+B+B^2)$.

Cum $det(I_n+X+X^2)\geq 0, \forall X\in M_2(\mathbb{R})$, rezultă $\det\left[I_n-A^3-B^3+(AB)^3\right]\geq 0$.

3. Relația din enunț se scrie echivalent $\frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_n}}-\frac{x_n}{\sqrt{x_{n-1}}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \forall n\geq 1$.

Avem succesiv: $\frac{x_2}{\sqrt{x_1}}-\frac{x_1}{\sqrt{x_0}}=1-\frac{1}{2}, \frac{x_3}{\sqrt{x_2}}-\frac{x_2}{\sqrt{x_1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ldots,\frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_n}}-\frac{x_n}{\sqrt{x_{n-1}}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Prin adunare membru cu membru obținem: $\frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_n}}=2-\frac{1}{n+1}$ sau echivalent

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n}\left(2-\frac{1}{n+1}\right), \forall n\geq 0\ (*)$$

Prin inducție după n se obține imediat că $x_n<4, \forall n\in N$.

Studiem monotonia șirului $(x_n)_{n\geq 0}$, scriind relația (*) astfel: $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2-\frac{1}{n+1}}{\sqrt{x_n}}, \forall n\in N$.

Demonstrăm prin inducție după $n\in N$ că $\sqrt{x_n}\leq 2-\frac{1}{n+1}, \forall n\in N$.

Etapa de verificare: $\sqrt{x_0}\leq 2-\frac{1}{0+1}\Leftrightarrow 1\leq 1$, adevărat.

Etapa de demonstrație: presupunem că $\sqrt{x_n}\leq 2-\frac{1}{n+1}$ și demostrăm că $\sqrt{x_{n+1}}\leq 2-\frac{1}{n+2}$.

Avem: $x_{n+1}=\sqrt{x_n}\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\leq\left(2-\frac{1}{n+1}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{x_{n+1}}\leq 2-\frac{1}{n+1}\leq 2-\frac{1}{n+2}$.

Prin urmare șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător și mărginit, deci convergent.

Trecând la limită în relația (*) obținem $\lim_{n\to\infty} x_n=4$.

4. $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{x_n}>0\Longrightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.
Presupunem că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior, deci va fi convergent. Trecând la limita în relația de recurență obținem:

$$l-l=\frac{1}{l}+\frac{1}{l}, \text{ cu } l>0. \text{ Contradictie, deci } \lim_{n\to\infty} x_n=\infty.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\frac{1}{x_{n+1}\cdot x_n}+\frac{1}{x_n^2}\to 1$$

$$x_2-x_1=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1},\ldots,x_n-x_{n-1}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_{n-1}}.$$

Prin adunarea relațiilor se obține:

$$2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)=x_n+\frac{1}{x_n}-x_1+\frac{1}{x_1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{n+1}}\right)^2-\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)^2}{n+1-n}=1\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\frac{1}{x_n}\right)=1.$$

CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr.2, 200760 Craiova,
E-mail: cjex.dolj@gmail.com Web: www.isj.dj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Barem de corectare

Clasa a XI-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
$a) X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$	1p
$AX = XA \Rightarrow x = t, z = 0$	1p
b) $AY = Y^{2016} = YA \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{a}, b \in R$	2p
$Y^{2015} = \begin{pmatrix} a^{2015} & 2015a^{2014}b \\ 0 & a^{2015} \end{pmatrix}$	3p
$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$	2p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
a) $A^{-1} + B^{-1} = I_n \Rightarrow I_n + AB^{-1} = A \Rightarrow A + B = AB \Rightarrow (I_n - A) \cdot (I_n - B) = I_n$	3p
b) $(I_n - A) \cdot (I_n - B) = I_n \Leftrightarrow BA = A + B$	1p
$I_n - A^3 - B^3 + (AB)^3 = (I_n + A + A^2) \cdot (I_n + B + B^2)$	3 p
$det(I_n + X + X^2) \geq 0, \forall X \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \det\left[I_n - A^3 - B^3 + (AB)^3\right] \geq 0.$	2p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
$\frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_n}} - \frac{x_n}{\sqrt{x_{n-1}}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1.$	2p
$\frac{x_2}{\sqrt{x_1}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_0}} = 1 - \frac{1}{2}, \frac{x_3}{\sqrt{x_2}} - \frac{x_2}{\sqrt{x_1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_n}} - \frac{x_n}{\sqrt{x_{n-1}}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$	1p
Prin adunare avem $\frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_n}} = 2 - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1} = \sqrt{x_n}\left(2 - \frac{1}{n+1}\right), \forall n \geq 0$	1p
Prin inducție după n: $x_n < 4, \forall n \in N.$	1p
Prin inducție după $n \in N$: $\sqrt{x_n} \leq 2 - \frac{1}{n+1}, \forall n \in N.$	2p

Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător și mărginit, deci convergent	1p
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4.$	1p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n} > 0 \Longrightarrow (x_n)$ este strict crescător	1p
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$	2p
$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{x_{n+1}\cdot x_n} + \frac{1}{x_n^2} \to 1$	2p
$2\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) = x_n + \frac{1}{x_n} - x_1 + \frac{1}{x_1}$	1p
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)^2}{n} = 1$	2p
Finalizare	1p
TOTAL	**10p**